

2.3

ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΗΣ ΚΑΙ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Μέση τιμή $\bar{x} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_v}{v} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v t_i$

$$\bar{x} = \frac{v_1 x_1 + v_2 x_2 + \dots + v_k x_k}{v_1 + v_2 + \dots + v_k} = \frac{\sum_{i=1}^k v_i x_i}{\sum_{i=1}^k v_i} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k v_i x_i$$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^k \frac{v_i x_i}{v} = \sum_{i=1}^k f_i x_i$$

2.

Σταθμικός Μέσος $\bar{x} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_v w_v}{w_1 + w_2 + \dots + w_v} = \frac{\sum_{i=1}^v x_i w_i}{\sum_{i=1}^v w_i}$

όπου w_i ο συντελεστής στάθμισης (βαρύτητας) της τιμής x_i

3.

Διάμεσος (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων, οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά, ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση, όταν το n είναι περιττός αριθμός, ή το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων όταν το n είναι άρτιος αριθμός.

Σημείωση. Η διάμεσος έχει αθροιστική συχνότητα $F_i = 50\%$

4.

Μέτρα θέσης λέγονται η μέση τιμή ή ο σταθμικός μέσος και η διάμεσος.

5.

Εύρος $R = \text{Μεγαλύτερη παρατήρηση} - \text{Μικρότερη παρατήρηση}$

Σημείωση. Το εύρος δεν είναι αξιόπιστο μέτρο διασποράς.

6.

Διακύμανση ή διασπορά $s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v (t_i - \bar{x})^2$

$$s^2 = \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^v t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^v t_i \right)^2}{v} \right\}$$

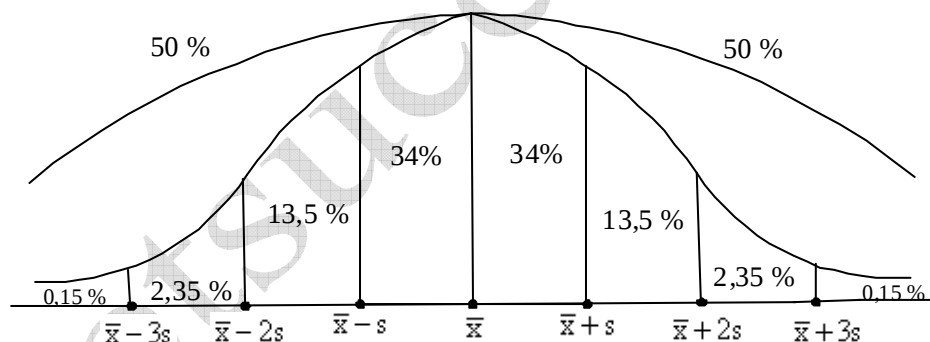
$$s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 v_i$$

7.

Τυπική απόκλιση $s = \sqrt{s^2}$

Για κάθε **κανονική ή περίπου κανονική** κατανομή:

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται τα ποσοστά των παρατηρήσεων που ανήκουν στα αντίστοιχα διαστήματα.



8.

Συντελεστής μεταβολής ή

συντελεστής μεταβλητότητας $CV = \frac{s}{\bar{x}}, \bar{x} \neq 0$

Σημείωση. Αν $\bar{x} < 0$ τότε $CV = \frac{s}{|\bar{x}|}$

Τον CV τον εκφράζουμε σε ποσοστό %

Μικρότερος CV σημαίνει μεγαλύτερη ομοιογένεια

Ομοιογενές δείγμα τιμών, όταν $CV \leq 10\%$

9.

Από τις μεταβλητές στις μέσες τιμές και στις τυπικές αποκλίσεις

- $Y = X + c \Rightarrow \bar{y} = \bar{x} + c$ και $S_y = S_x$
- $Y = c X \Rightarrow \bar{y} = c \bar{x}$ και $S_y = |c| S_x$
- $Y = c X + c_1 \Rightarrow \bar{y} = c \bar{x} + c_1$ και $S_y = |c| S_x$

10.

Για κανονική ή περίπου κανονική κατανομή:

- $R \approx 6S$
- $\delta = \bar{x}$

ΣΧΟΛΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΙ

1.

Διάκριση παρατηρήσεων t_i – τιμών x_i

Κάθε τιμή x_i είναι το σύνολο των ίσων μεταξύ τους παρατηρήσεων t_i .

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι v με το μέγεθος του δείγματος.

Το πλήθος των τιμών συνήθως το συμβολίζουμε με k . Είναι βέβαια $k < v$

2.

Συντομογραφία αθροίσματος

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \sum_{i=1}^3 \alpha_i, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_v = \sum_{i=1}^v \alpha_i$$

3.

Εύρεση της διαμέσου σε ομαδοποιημένα δεδομένα

Σχεδιάζουμε το πολύγωνο που αντιστοιχεί στο ιστόγραμμα των σχετικών

αθροιστικών συχνοτήτων $F_i\%$ και βλέπουμε ποια τιμή αντιστοιχεί στο 50% των παρατηρήσεων.

4.

Εύρεση της διαμέσου σε μεγάλο πλήθος τιμών

Από τον πίνακα συχνοτήτων προσδιορίζουμε την παρατήρηση ή τις παρατηρήσεις που καθορίζουν την διάμεσο.

5.

Προτιμότερη η τυπική απόκλιση από τη διακύμανση

Στις διάφορες έρευνες, τις πιο πολλές φορές, αντί της διακύμανσης χρησιμοποιούμε την τυπική απόκλιση, διότι εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες που εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

6.

Τρεις ακόμα τύποι για τη διακύμανση

$$s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v t_i^2 - \bar{x}^2, \quad s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k v_i x_i^2 - \bar{x}^2, \quad s^2 = \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 f_i$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Η μέση τιμή των παρατηρήσεων x, y, z είναι 30, των x, y είναι 14 και των y, z είναι 18. Να βρείτε:

- i) τους x, y, z
- ii) τη διάμεσο
- iii) την τυπική απόκλιση

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\begin{cases} \frac{x+y+z}{3}=30 \\ \frac{x+y}{2}=14 \\ \frac{y+z}{2}=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=90 \\ x+y=28 \\ y+z=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 28+z=90 \\ x+y=28 \\ y+z=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=62 \\ x+y=28 \\ y+z=36 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} z=62 \\ x+y=28 \\ y+62=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=62 \\ x+y=28 \\ y=-26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=62 \\ x-26=28 \\ y=-26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=62 \\ x=54 \\ y=-26 \end{cases}$$

ii)

Οι παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά είναι $-26, 54, 62$, άρα $\delta = 54$

iii)

$$S^2 = \frac{(-26-30)^2 + (54-30)^2 + (62-30)^2}{3} = \frac{3136 + 576 + 1024}{3} = 1578,6$$

$$\text{Οπότε } S = \sqrt{1578,6} = 39,7$$

2.

Η μέση τιμή n παρατηρήσεων είναι 15. Αν η μικρότερη παρατήρηση είναι 10, πόσο πρέπει να την αυξήσουμε, ώστε η μέση τιμή να γίνει 18;

Προτεινόμενη λύση

Γνωρίζουμε ότι

$$15 = \frac{10 + x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n} \Leftrightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} = 15n - 10 \quad (1).$$

Έστω ότι η τιμή 10 αυξάνεται κατά λ , τότε

$$18 = \frac{10 + \lambda + x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} 18 = \frac{10 + \lambda + 15n - 10}{n}$$

$$18n = \lambda + 15n \Leftrightarrow \lambda = 3n$$

3.

Σε μία επιχείρηση εργάζονται συνολικά 20 υπάλληλοι με μέσο μηνιαίο μισθό 2400 €. Ο μέσος μηνιαίος μισθός των 10 κατώτερων υπαλλήλων είναι 1800 €. ενώ των 2 ανώτερων είναι 6000 €. Να βρείτε το μέσο μηνιαίο μισθό των μεσαίων υπαλλήλων.

Προτεινόμενη λύση

Έστω ότι $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ είναι οι μισθοί των κατώτερων υπαλλήλων

y_1, y_2 οι μισθοί των δύο ανώτερων και

$z_1, z_2, \dots, z_8$ οι μισθοί των υπόλοιπων 8 μεσαίων υπαλλήλων.

Αφού ο συνολικός μέσος μισθός είναι 2400 €, θα έχουμε

$$2400 = \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_{10}) + (z_1 + z_2 + \dots + z_8) + (y_1 + y_2)}{20} \quad (1)$$

$$\text{Αλλά } 1800 = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{10}}{10} \Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 18000 \quad (2)$$

$$\text{και } 6000 = \frac{y_1 + y_2}{2} \Rightarrow y_1 + y_2 = 12000 \quad (3)$$

$$\text{Εμείς θέλουμε να βρούμε τη } \bar{z} = \frac{z_1 + z_2 + \dots + z_8}{8}$$

$$(1) \stackrel{(2),(3)}{\Rightarrow} 2400 = \frac{18000 + 12000 + (z_1 + z_2 + \dots + z_8)}{20}$$

$$48000 = 30000 + z_1 + z_2 + \dots + z_8$$

$$z_1 + z_2 + \dots + z_8 = 18000$$

$$\text{Άρα } \bar{z} = \frac{z_1 + z_2 + \dots + z_8}{8} = \frac{18000}{8} = 2250$$

4.

Η μέση τιμή 10 διαφορετικών παρατηρήσεων βρέθηκε ότι είναι 20. Αργότερα διαπιστώθηκε πως η παρατήρηση που ήταν ίση με 28, γράφτηκε κατά λάθος 38. Να βρείτε την πραγματική μέση τιμή.

Προτεινόμενη λύση

$$\text{Η λανθασμένη μέση τιμή προέκυψε από τον τύπο } 20 = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_9 + 38}{10} \Rightarrow$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_9 + 38 = 200$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_9 = 162 \quad (1)$$

$$\text{Η πραγματική μέση τιμή είναι } \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_9 + 28}{10} \stackrel{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\bar{x} = \frac{162 + 28}{10} = 19.$$

5.

Μία μεταβλητή X , ενός δείγματος μεγέθους n , έχει τιμές 1, 2, 3, 4, 5 με συχνότητες v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 αντίστοιχα, και μέση τιμή 20.

Κάθε συχνότητα v_i αυξάνεται και γίνεται ίση με $v_i + v$.

Να βρείτε την νέα μέση τιμή.

Προτεινόμενη λύση

Έχουμε ότι

$$20 = \frac{1v_1 + 2v_2 + 3v_3 + 4v_4 + 5v_5}{n} \quad (1) \quad \text{με} \quad n = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5.$$

Μετά την μεταβολή οι νέες συχνότητες θα είναι

$$v_1' = v_1 + v, \quad v_2' = v_2 + v, \quad v_3' = v_3 + v, \quad v_4' = v_4 + v, \quad v_5' = v_5 + v$$

Το νέο μέγεθος n' θα είναι $n' = v_1' + v_2' + v_3' + v_4' + v_5'$

$$= v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + 5v$$

$$= n + 5v = 6v$$

$$\text{Νέα μέση τιμή: } \bar{x} = \frac{1(v_1 + v) + 2(v_2 + v) + 3(v_3 + v) + 4(v_4 + v) + 5(v_5 + v)}{6v}$$

$$= \frac{v_1 + v + 2v_2 + 2v + 3v_3 + 3v + 4v_4 + 4v + 5v_5 + 5v}{6v}$$

$$= \frac{v_1 + 2v_2 + 3v_3 + 4v_4 + 5v_5 + 15v}{6v}$$

$$= \frac{v_1 + 2v_2 + 3v_3 + 4v_4 + 5v_5}{6v} + \frac{15v}{6v}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{v_1 + 2v_2 + 3v_3 + 4v_4 + 5v_5}{n} + \frac{15v}{6v}$$

$$\stackrel{(1)}{=} \frac{1}{6} \cdot 20 + \frac{15}{6} = 5,83$$

6.

Σε 15 παρατηρήσεις βρέθηκε μέση τιμή 50. Αργότερα διαπιστώθηκε ότι :
 10 παρατηρήσεις είχαν υπερεκτιμηθεί κατά 4 μονάδες η κάθε μια ,
 3 υποεκτιμήθηκαν κατά 2 μονάδες η κάθε μία,
 ενώ οι άλλες είχαν την σωστή τιμή.
 Να βρείτε τη πραγματική μέση τιμή

Προτεινόμενη λύση

Έστω ότι $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}$ είναι οι πραγματικές τιμές .

Υποθέτοντας ότι υπερεκτιμήθηκαν οι 10 πρώτες και υποεκτιμήθηκαν οι τρεις επόμενες η μέση τιμή 50 προέκυψε από το κλάσμα

$$\begin{aligned}
 50 &= \frac{(x_1 + 4) + (x_2 + 4) + \dots + (x_{10} + 4) + (x_{11} - 2) + (x_{12} - 2) + (x_{13} - 2) + x_{14} + x_{15}}{15} \\
 50 &= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{15} + 4 \cdot 10 - 3 \cdot 2}{15} \\
 50 &= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{15} + 34}{15} \\
 50 &= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{15}}{15} + \frac{34}{15} \\
 50 - \frac{34}{15} &= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{15}}{15} \\
 47,73 &= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{15}}{15} \quad \text{Άρα } \bar{x} = 47,73
 \end{aligned}$$

7.

Οι ημερήσιες αποδοχές σε € 15 εργατών είναι οι εξής:
27, 28, 30, 29, 29, 26, 27, 26, 25, 31, 31, 24, 27, 31, 29 .

- i) Να βρείτε την μέση τιμή
ii) Οι αποδοχές των εργατών που παίρνουν λιγότερα από την μέση τιμή αυξάνονται και γίνονται ίσες με την μέση τιμή.
Ποια θα είναι τότε η νέα μέση τιμή;

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\bar{x} = \frac{24 + 25 + 2 \cdot 26 + 3 \cdot 27 + 28 + 3 \cdot 29 + 30 + 3 \cdot 31}{15} = \frac{420}{15} = 28$$

ii)

Μετά τις μεταβολές έχουμε

$$\begin{aligned} \bar{x}' &= \frac{(24+4) + (25+3) + 2 \cdot (26+2) + 3 \cdot (27+1) + 28 + 3 \cdot 29 + 30 + 3 \cdot 31}{15} \\ &= \frac{420+14}{15} = 28,93. \end{aligned}$$

8.

Δείξτε ότι για κάθε ποσοτική μεταβλητή X ενός δείγματος μεγέθους n ισχύει $x_e \leq \bar{x} \leq x_\mu$, όπου x_e είναι η μικρότερη παρατήρηση, x_μ είναι η μεγαλύτερη παρατήρηση και $\bar{x}$ είναι η μέση τιμή.

Προτεινόμενη λύση

Έστω x_e η μικρότερη παρατήρηση και x_μ η μεγαλύτερη
τότε για κάθε τιμή x_i θα έχουμε

$$x_e \leq x_1 \leq x_\mu$$

$$x_e \leq x_2 \leq x_\mu$$

$$x_e \leq x_3 \leq x_\mu$$

.

.

.

$$x_e \leq x_n \leq x_\mu$$

προσθέτοντας κατά μέλη

$$\begin{aligned} n x_e \leq x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \leq n x_\mu &\Leftrightarrow x_e \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} \leq x_\mu \\ x_e \leq \bar{x} \leq x_\mu \end{aligned}$$

9.

Να βρείτε την μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της μεταβλητής του διπλανού πίνακα.

Προτεινόμενη λύση

Συμπληρώνοντας τον παραπάνω πίνακα έχουμε

Βάρος σε κιλά	Συχνότη v_i	Κεντρ. τιμή x_i	$v_i x_i$	$v_i x_i^2$
[54,60)	18	57	1026	58482
[60,66)	46	63	2898	182574
[66,72)	70	69	4830	333270
[72,78)	35	75	2625	196875
[78,84)	21	81	1701	137781
[84,90)	10	87	870	75690
Σύνολο	200	—	13950	984672

Βάρος σε κιλά	Συχνότη. v_i
[54,60)	18
[60,66)	46
[66,72)	70
[72,78)	35
[78,84)	21
[84,90)	10
Σύνολο	200

$$\bar{x} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k v_i x_i = \frac{1}{200} \cdot 13950 = 69,75 \text{ κιλά}$$

$$S^2 = \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^k v_i x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^k v_i x_i \right)^2}{v} \right\} = \frac{1}{200} \left(984672 - \frac{13950^2}{200} \right) \approx 58,3$$

$$\text{Άρα } S = \sqrt{58,3} \approx 7,63$$

10.

Στο διπλανό πίνακα να συμπληρώσετε τις σχετικές συχνότητες που λείπουν, αν γνωρίζεται ότι η μέση τιμή είναι $\bar{x} = 2,1$

Προτεινόμενη λύση

Έστω x, y οι ζητούμενες σχετικές συχνότητες.

x_i	f_i
1	0,26
2	
3	0,23
4	
Σύνολο	

Τότε

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^k f_i x_i \Leftrightarrow 2,1 = 1 \cdot 0,26 + 2x + 3 \cdot 0,23 + 4y \Leftrightarrow 2x + 4y = 1,15 \quad (1)$$

$$\text{Από τον πίνακα έχουμε } 0,26 + x + 0,23 + y = 1 \Leftrightarrow x + y = 0,51 \quad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των (1), (2) βρίσκουμε $x = 0,445$ και $y = 0,065$.

11.

Η μέση τιμή και η διακύμανση των βαθμών 6 μαθητών είναι $\bar{x} = 12$ και $S^2 = 10$.

Για τους βαθμούς των πέντε εξ' αυτών ισχύει $\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = 11$. Να βρείτε τον βαθμό του έκτου μαθητή αν ξέρετε ότι έγραψε πάνω από την βάση.

Προτεινόμενη λύση

Αν x_6 είναι ο βαθμός του 6^{ου} μαθητή τότε

$$S^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + (x_4 - \bar{x})^2 + (x_5 - \bar{x})^2 + (x_6 - \bar{x})^2}{6} \Leftrightarrow$$

$$10 = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 + (x_6 - 12)^2}{6} \Leftrightarrow$$

$$10 = \frac{11 + x_6^2 - 24x_6 + 144}{6} \Leftrightarrow$$

$$x_6^2 - 24x_6 + 95 = 0 \Leftrightarrow x_6 = 19 \text{ ή } x_6 = 5$$

Δεκτή η τιμή $x_6 = 19$, αφού έγραψε πάνω από την βάση.

12.

Ο διπλανός πίνακας δίνει την βαθμολογία n υποψηφίων της Γ Λυκείου στο μάθημα της έκθεσης .

- Να συμπληρωθεί ο πίνακας
- Να βρεθεί το πλήθος των ατόμων του δείγματος που έχουν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο από 37,5.
- Να βρεθεί η μέση τιμή της κατανομής.

Βαθμοί	n_i	$f_i \%$	$F_i \%$
[0, 25)			5
[25, 50)		20	
[50, 75)	49		
[75,100)		40	
Σύνολο			

Προτεινόμενη λύση**i)**

$$F_1=5\% \Leftrightarrow f_1\% = 5$$

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 100 \Leftrightarrow 5 + 20 + f_3 + 40 = 100 \Leftrightarrow f_3\% = 35.$$

$$f_3 = \frac{n_3}{n} \Leftrightarrow 0,35 = \frac{49}{n} \Leftrightarrow n = 140$$

Οπότε ο πίνακας γίνεται

Βαθμοί	n_i	$f_i\%$	$F_i\%$	Κεν. τιμή x_i	$n_i x_i$
[0,25)	7	5	5	12,5	87,5
[25,50)	28	20	25	37,5	1050
[50,75)	49	35	60	62,5	3062,5
[75,100)	56	40	100	87,5	4900
Σύνολο	140	100			9100

ii)

$$\frac{n_2}{2} + n_3 + n_4 = 14 + 49 + 56 = 119$$

iii)

$$\bar{x} = \frac{1}{140} \sum_{i=1}^5 n_i x_i = \frac{9100}{140} = 65$$

Θυμήσου τις
ιδιότητες των
 F_i, f_i

Ισοκατανομή των
παρατηρήσεων σε
Κάθε κλάση

13.

Οι τιμές της απώλειας βάρους σε κιλά 160 ατόμων τα οποία ακολούθησαν ένα πρόγραμμα αδυνατίσματος, έχουν ομαδοποιηθεί σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους, όπως εμφανίζονται στο διπλανό πίνακα.

Απώλεια Βάρους	Κ. Κλάσης x_i	Συχν. v_i
[0 - ...)		20
[...-...)	6	40
[...-...)		45
[...-...)		30
[...-...)		25
Σύνολο		160

- Να αποδείξετε ότι το πλάτος κάθε κλάσης είναι 4
- Να συμπληρώσετε τον πίνακα να βρείτε την μέση τιμή και την τυπική απόκλιση
- Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές
- Να βρείτε το ποσοστό των ατόμων με βάρος από 7 μέχρι και 14 κιλά .

Προτεινόμενη λύση**i)**

Έστω c το πλάτος κάθε κλάσης. Η πρώτη κλάση θα είναι η $[0, c)$

Η δεύτερη θα είναι η $[c, 2c)$

Κανόνες ομαδοποίησης

με κέντρο $x_2 = 6 \Leftrightarrow \frac{c + 2c}{2} = 6$

$3c = 12 \Leftrightarrow c = 4$

ii)

Συμπληρωμένος ο πίνακας και με στήλες $v_i x_i$ και $v_i x_i^2$ είναι

Απώλεια Βάρους	Κέντρο x_i	Συχνότητα v_i	$v_i x_i$	$v_i x_i^2$
[0 - 4)	2	20	40	80
[4 - 8)	6	40	240	1440
[8 - 12)	10	45	450	4500
[12 - 16)	14	30	420	5880
[16 - 20)	18	25	450	8100
Σύνολο		160	1600	20000

$$\bar{x} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k v_i x_i = \frac{1}{160} \cdot 1600 = 10 \text{ κιλά}$$

$$S^2 = \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^k v_i x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^k v_i x_i \right)^2}{v} \right\} = \frac{1}{160} \left(20000 - \frac{1600^2}{160} \right) = 25, \quad \text{οπότε } S = \sqrt{25} = 5$$

iii)

$$CV = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{5}{10} = 0,5 \quad \text{δηλαδή} \quad CV = 0,5 \cdot 100 = 50 \% > 10 \% \quad \text{δείγμα μη ομοιογενές}$$

iv)

Το πλήθος των ατόμων με απώλεια βάρους από 7 μέχρι και 14 κιλά είναι :

$$\frac{v_2}{4} + v_3 + \frac{v_4}{2} = 10 + 45 + 15 = 70$$

Θυμήσου την ισοκατανομή των παρατηρήσεων στις κλάσεις

Το ζητούμενο ποσοστό είναι : $\frac{70}{160} \cdot 100 = 43,75\%$

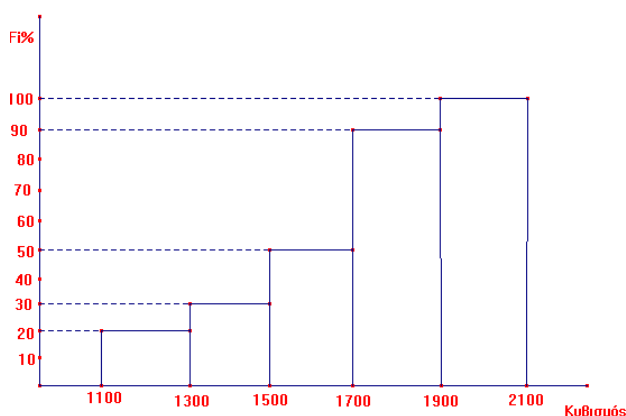
netsuccess.gr

14.

Στο παρακάτω ιστόγραμμα σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων παρουσιάζεται το ποσοστό των αυτοκινήτων που παράγει μία βιομηχανία σ' ένα μήνα σε σχέση με τον κυβισμό του κινητήρα .

Το πλήθος των αυτοκινήτων με κυβισμό μεγαλύτερο ή ίσο από 1700 και μικρότερο από 1900 cm^3 είναι 2500 . Να βρείτε :

- i) Το πλήθος των αυτοκινήτων που παράγει η βιομηχανία σ' ένα μήνα.
- ii) Το πλήθος των αυτοκινήτων με κυβισμό μεγαλύτερο ή ίσο από 1600 cm^3
- iii) Τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της κατανομής.
- iv) Τη διάμεσο της κατανομής

**Προτεινόμενη λύση****i)**

$$F_4 = 90\% \quad \text{και} \quad F_3 = 50\%$$

$$F_4 = F_3 + f_4 \Leftrightarrow f_4 = F_4 - F_3 = 40\%.$$

Από την υπόθεση του προβλήματος αυτό το ποσοστό αντιστοιχεί σε 2500 αυτοκίνητα. Αν λοιπόν η βιομηχανία παράγει n αυτοκίνητα σ' έναν μήνα έχουμε ότι

$$\frac{40}{100} \cdot n = 2500 \Leftrightarrow n = 6250.$$

ii)

$$f_1 = F_1 = 20\%$$

$$f_2 = F_2 - F_1 = 30 - 20 = 10\%$$

$$f_3 = F_3 - F_2 = 50 - 30 = 20\%$$

$$f_4 = F_4 - F_3 = 90 - 50 = 40\%$$

$$f_5 = F_5 - F_4 = 100 - 90 = 10\%$$

Το ζητούμενο πλήθος έχει ποσοστό ίσο με

$$\frac{f_3}{2} + f_4 + f_5 = 10 + 40 + 10 = 60\%$$

$$\text{Άρα το ζητούμενο πλήθος είναι : } \frac{60}{100} \cdot 6250 = 3750 \text{ αυτοκίνητα .}$$

iii)

Από τα παραπάνω έχουμε τον πίνακα

Κλάσεις	Κ.τιμή x_i	$f_i \%$	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
[1100, 1300)	1200	20	0,2	240	288000
[1300, 1500)	1400	10	0,1	140	196000
[1500, 1700)	1600	20	0,2	320	512000
[1700, 1900)	1800	40	0,4	720	1296000
[1900, 2100)	2000	10	0,1	200	400000
Σύνολο	—	100	1,0	1620	2692000

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^k f_i x_i = 1620 \text{ cm}^3$$

$$S^2 = \sum_{i=1}^k f_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^k f_i x_i \right)^2 = 2692000 - 1620^2 = 67600$$

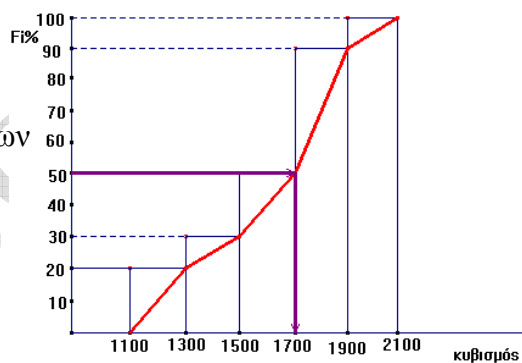
$$\text{Άρα } S = \sqrt{67600} = 260 \text{ cm}^3$$

iv)

Για την διάμεσο της κατανομής
 σχεδιάζουμε το πολύγωνο που
 αντιστοιχεί στο ιστόγραμμα των $F_i\%$
 Όπως βλέπουμε στο 50% των παρατηρήσεων
 αντιστοιχεί η τιμή 1700.

Άρα $\delta=1700$

Σχόλιο 3



15.

Για τα δεδομένα του διπλανού πίνακα δίνεται
ότι $\bar{x} = 2,6$

- i) Να δείξετε ότι $\alpha = 33$ και $\beta = 10$
 ii) Να βρείτε την διάμεσο της κατανομής
 iii) Να χαρακτηρίσετε την κατανομή ως προς την ομοιογένεια.

x_i	v_i
1	12
2	α
3	β
4	25
Σύνολο	80

Προτεινόμενη λύση**i)**

$$\bar{x} = 2,6 \Leftrightarrow \frac{12 + 2\alpha + 3\beta + 100}{80} = 2,6$$

$$2\alpha + 3\beta = 96 \quad (1)$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = v \Leftrightarrow 12 + \alpha + \beta + 25 = 80$$

$$\alpha + \beta = 43 \quad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των (1), (2) βρίσκουμε ότι $\alpha = 33$ και $\beta = 10$

ii)

Στο δοσμένο πίνακα συμπληρώνουμε τη στήλη των συχνοτήτων.

x_i	v_i
1	12
2	33
3	10
4	25
Σύνολο	80

$$\delta = \frac{40^{\text{η}} \text{παρ} + 41^{\text{η}} \text{παρ}}{2}$$

Όπως εύκολα προκύπτει από την στήλη των συχνοτήτων οι 12 πρώτες παρατηρήσεις έχουν τιμή 1 και οι 33 επόμενες έχουν τιμή 2. Επομένως η 40^η και η 41^η παρατηρήσεις έχουν τιμή 2

$$\text{Άρα } \delta = \frac{2+2}{2} = 2$$

iii)

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k v_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{12(1-2,6)^2 + 33(2-2,6)^2 + 10(3-2,6)^2 + 25(4-2,6)^2}{80} = \\ &= \frac{12 \cdot 2,56 + 33 \cdot 0,36 + 10 \cdot 0,16 + 25 \cdot 1,96}{80} = \\ &= \frac{93,2}{80} = 1,165 \end{aligned}$$

$$\text{Οπότε } S = \sqrt{1,165} \approx 1,08$$

$$CV = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{1,08}{2,6} \approx 0,42$$

$CV = 42\% > 10\%$ οπότε η κατανομή δεν είναι ομοιογενής

16.

Ένα κατάστημα πουλάει 4 είδη υφασμάτων A, B, Γ, Δ με τιμή ανά μέτρο 20, 40, 50, 80 €, αντίστοιχα.

Οι ημερήσιες πωλήσεις για κάθε είδος υφάσματος ήταν 10%, 20%, 30%, 40% αντίστοιχα.

Να βρείτε την μέση τιμή και την διάμεσο της τιμής πώλησης του μέτρου των υφασμάτων αν γνωρίζουμε ότι :

- i) σε μία μέρα πουλήθηκαν συνολικά 60 μέτρα υφάσματος
- ii) δε γνωρίζουμε πόσα μέτρα υφάσματος πουλήθηκαν

Προτεινόμενη λύση**i)**

Αφού πουλήθηκαν συνολικά 60 μέτρα υφάσματος, με βάση τα αντίστοιχα ποσοστά, από κάθε είδος υφάσματος πουλήθηκε :

$$\text{Α είδος} \quad 60 \cdot \frac{10}{100} = 6 \text{ μέτρα,}$$

$$\text{Β είδος} \quad 60 \cdot \frac{20}{100} = 12 \text{ μέτρα}$$

$$\text{Γ είδος} \quad 60 \cdot \frac{30}{100} = 18 \text{ μέτρα,}$$

$$\text{Δ είδος} \quad 60 \cdot \frac{40}{100} = 24 \text{ μέτρα}$$

Ο πίνακας κατανομής συχνοτήτων είναι

Τιμή x_i	Συχν. v_i
20	6
40	12
50	18
80	24
Σύνολο	60

$$\text{Επομένως} \quad \bar{x} = \frac{20 \cdot 6 + 40 \cdot 12 + 50 \cdot 18 + 80 \cdot 24}{60} = 57 \text{ €}$$

$$\text{και} \quad \delta = \frac{30^{\text{η}} \text{ παρ} + 31^{\text{η}} \text{ παρ}}{2} = \frac{50 + 50}{2} = 50 \text{ €}$$

ii)

$$f_A = 0,1, \quad f_B = 0,2, \quad f_\Gamma = 0,3, \quad f_\Delta = 0,4$$

$$\begin{aligned} \text{άρα} \quad \bar{x} &= \sum_{i=1}^k x_i f_i = 20 \cdot 0,1 + 40 \cdot 0,2 + 50 \cdot 0,3 + 80 \cdot 0,4 \\ &= 2 + 8 + 15 + 32 = 57 \text{ €} \end{aligned}$$

Για την διάμεσο παρατηρούμε ότι :

Το πρώτο 10% των παρατηρήσεων έχει τιμή 20, το αμέσως επόμενο 20% έχει τιμή 40, και το μεθεπόμενο 30% έχει τιμή 50. Προφανώς στο 50% των παρατηρήσεων αντιστοιχεί η τιμή 50. Άρα $\delta = 50 \text{ €}$.

17.

Εξετάσαμε τη διάρκεια ζωής ενός δείγματος μεγέθους 5 των μηχανημάτων που παράγουν δύο εταιρείες Α και Β.

Τα δεδομένα φαίνονται στο διπλανό πίνακα.

- i) Να βρείτε την μέση διάρκεια ζωής των μηχανημάτων κάθε εταιρείας.
- ii) Αν τα μηχανήματα της Α εταιρείας κοστίζουν 920 € και της Β 850 €, ποιας εταιρείας τα μηχανήματα θα προτιμούσατε να αγοράσετε;

Διάρκεια ζωής σε μήνες

A	B
24	24
28	26
46	32
60	44
72	64

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\bar{x}_A = \frac{24 + 28 + 46 + 60 + 72}{5} = \frac{230}{5} = 46 \text{ μήνες}$$

$$\bar{x}_B = \frac{24 + 26 + 32 + 44 + 64}{5} = \frac{190}{5} = 38 \text{ μήνες}$$

ii)

Το κόστος των μηχανημάτων της Α εταιρείας είναι 920 € και της Β 850 €.

Εκ πρώτης όψεως τα μηχανήματα της πρώτης εταιρείας είναι ακριβότερα .

Όμως το ανά μήνα κόστος των μηχανημάτων

$$\text{της Α εταιρείας είναι } \frac{920}{46} = 20 \text{ €} \quad \text{και της Β είναι } \frac{850}{38} = 22,36 \text{ €}$$

άρα μας συμφέρει να αγοράσουμε τα μηχανήματα της Α εταιρείας.

18.

Στις τιμές 1, 2, 3, α αντιστοιχούν συντελεστές βαρύτητας α, 3, 2, $\frac{\alpha}{2}$ αντίστοιχα. Αν ο σταθμικός μέσος είναι ίσος με 2, να βρείτε την τιμή α.

Προτεινόμενη λύση

Έχουμε ότι

$$2 = \frac{1 \cdot \alpha + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + \alpha \cdot \frac{\alpha}{2}}{\alpha + 3 + 2 + \frac{\alpha}{2}} \Leftrightarrow 2 = \frac{\frac{\alpha^2}{2} + \alpha + 12}{\frac{3\alpha}{2} + 5}$$

$$\frac{\alpha^2}{2} + \alpha + 12 = 3\alpha + 10$$

$$\alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2.$$

19.

Δίνονται πέντε διαδοχικοί άρτιοι αριθμοί με άθροισμα 40. Να βρείτε

- i) Τους αριθμούς
- ii) Τη διάμεσο
- iii) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί αποτελούν ομοιογενές δείγμα

Προτεινόμενη λύση

i)

Έστω x ο μικρότερος αριθμός, Τότε οι ζητούμενοι αριθμοί είναι

$$x, \quad x+2, \quad x+4, \quad x+6, \quad x+8$$

$$x + x + 2 + x + 4 + x + 6 + x + 8 = 40 \Leftrightarrow 5x = 20 \Leftrightarrow x = 4$$

Άρα οι αριθμοί είναι : 4, 6, 8, 10, 12

ii)

$$\delta = 8$$

iii)

$$\bar{x} = \frac{40}{5} = 8$$

$$S^2 = \frac{(4-8)^2 + (6-8)^2 + (8-8)^2 + (10-8)^2 + (12-8)^2}{5}$$

$$= \frac{16+4+0+4+16}{5} = 8$$

$$\text{Άρα } S = \sqrt{8} \approx 2,82 \text{ και } CV = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{2,82}{8} = 0,353$$

Δηλαδή $CV = 35,3\% > 10\%$, άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές

20.

Μία μεταβλητή X ενός δείγματος μεγέθους n έχει τιμές 1, 2, 3, 4 με σχετικές συχνότητες 0,3, 0,2, 0,4 και 0,1 αντίστοιχα.

Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Προτεινόμενη λύση

$$\bar{x} = 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0,1 = 2,3 \text{ και}$$

$$S^2 = \sum_{i=1}^4 f_i (x_i - \bar{x})^2 =$$

$$= 0,3(1-2,3)^2 + 0,2(2-2,3)^2 + 0,4(3-2,3)^2 + 0,1(4-2,3)^2 = 1,01$$

άρα $S \approx 1$ οπότε

$$CV = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{1}{2,3} = 0,43 \text{ δηλαδή } CV = 43\% > 10\%,$$

άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

21.

Σ' ένα δείγμα 10 παρατηρήσεων η διάμεσος είναι $\delta = 3,5$ και είναι γνωστές μόνο οι παρατηρήσεις 5, 3, 2, 6, 7, 2, 3, 9, 3. Να βρείτε την παρατήρηση που λείπει.

Προτεινόμενη λύση

Τοποθετούμε τις γνωστές παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά.

2, 2, 3, 3, 3, 5, 6, 7, 9

Η διάμεσος ισούται με το ημιάθροισμα της 5^{ης} και 6^{ης} παρατήρησης.

Η ζητούμενη παρατήρηση δεν μπορεί να είναι ούτε μικρότερη του 2 ούτε μεγαλύτερη του 9, διότι τότε το ημιάθροισμα της 5^{ης} και 6^{ης} παρατήρησης δεν είναι ίσο με 3,5.

Με το ίδιο σκεπτικό η διάμεσος δεν μπορεί να είναι ούτε το 2 ούτε το 3 ούτε τα 5, 6, 7, 8, 9

Άρα η παρατήρηση που λείπει είναι ο αριθμός 4.

Τότε πράγματι είναι $\delta = \frac{3+4}{2} = 3,5$

22.

Ένα δείγμα μεγέθους 11 έχει παρατηρήσεις x_i : 7, 5, α , 2, 5, β , 8, 6, γ , 5, 3 όπου α , β , γ φυσικοί αριθμοί με $\alpha < \beta < \gamma$. Δίνεται ότι $\bar{x} = 6$, $\delta = 6$, $R = 8$.

i) Να βρεθούν οι τιμές των α , β , γ έτσι ώστε να ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 217$

ii) Για τις τιμές των α , β , γ που θα βρείτε, να δείξετε ότι $S_x = \sqrt{\frac{58}{11}}$ και να

εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές

iii) Αν y_i είναι οι παρατηρήσεις που θα προκύψουν πολλαπλασιάζοντας τις x_i επί μία θετική σταθερά c_1 και στην συνέχεια προσθέτοντας μία σταθερά c_2 και γνωρίζετε ότι $\bar{y} = 9$ και $S_y = 2S_x$, να βρείτε τις σταθερές c_1 , c_2 .

Προτεινόμενη λύση

i) Τοποθετούμε τις γνωστές παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά

2, 3, 5, 5, 5, 6, 7, 8

Επειδή το σύνολο των παρατηρήσεων είναι 11 η διάμεσος θα είναι η 6^η παρατήρηση και επειδή $\delta = 6$, η 6^η παρατήρηση θα είναι ίση με 6.

Η μικρότερη από τις άγνωστες παρατηρήσεις είναι η α

Αν ήταν $\alpha \leq 5$, τότε οι 6 πρώτες παρατηρήσεις θα είχαν τιμή ≤ 5 και επομένως η διάμεσος δεν θα ήταν ίση με 6. Άρα $\alpha \geq 6$

Η μικρότερη παρατήρηση είναι η $x_6 = 2$.

Αν x_μ είναι η μεγαλύτερη παρατήρηση, επειδή το εύρος R είναι ίσο με 8 θα ισχύει $8 = x_\mu - x_\epsilon \Leftrightarrow 8 = x_\mu - 2 \Leftrightarrow x_\mu = 10$

Οπότε $\gamma = 10$.

$$\bar{x} = \frac{2 + 3 + 3 \cdot 5 + 6 + 7 + 8 + 10 + \alpha + \beta}{11} \Leftrightarrow 6 = \frac{51 + \alpha + \beta}{11} \Leftrightarrow \alpha + \beta = 15 \quad (1)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 217 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 100 = 217 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 117 \quad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των (1), (2) και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\alpha < \beta$ βρίσκουμε $\alpha = 6$ και $\beta = 9$

ii)

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k v_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{(2-6)^2 + (3-6)^2 + 3 \cdot (5-6)^2 + 2 \cdot (6-6)^2 + (7-6)^2 + (8-6)^2 + (9-6)^2 + (10-6)^2}{11} = \frac{58}{11}$$

$$\text{Άρα } S = \sqrt{\frac{58}{11}} \quad \text{και} \quad CV = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{\frac{58}{11}}}{6} = \frac{\sqrt{58}}{6\sqrt{11}}$$

$$\text{Έστω ότι } CV \leq 10\% \Leftrightarrow CV \leq 0,1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{58}}{6\sqrt{11}} \leq 0,1$$

$$\sqrt{58} \leq 0,6\sqrt{11}$$

$$58 \leq 0,36 \cdot 11 \Leftrightarrow 58 \leq 3,96 \text{ πράγμα που δεν ισχύει}$$

Άρα $CV > 10\%$ επομένως το δείγμα δεν είναι ομοιογενές

iii)

$$y_i = c_1 x_i + c_2 \quad \text{Τότε} \quad \bar{y} = c_1 \bar{x} + c_2 \Leftrightarrow 9 = 6c_1 + c_2 \quad (3)$$

$$\text{Και} \quad S_y = |c_1| S_x \Leftrightarrow 2 S_x = c_1 S_x \Leftrightarrow c_1 = 2$$

$$\text{Η (3)} \Rightarrow 9 = 12 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = -3$$

23.

Από την εξέταση ενός δείγματος προέκυψε ο διπλανός πίνακας, όπου $\alpha > 0$.

Αν η μέση τιμή και η διάμεσος διαφέρουν κατά 0,46, να βρείτε τη διάμεσο και τη μέση τιμή.

x_i	N_i
1	α
2	30
3	50
4	100

Προτεινόμενη λύση

$$N_4 = 100 \Leftrightarrow n = 100$$

$$n_4 = N_4 - N_3 = 100 - 50 = 50$$

$$n_3 = N_3 - N_2 = 50 - 30 = 20$$

$$n_2 = N_2 - N_1 = 30 - \alpha$$

$$n_1 = \alpha$$

Η διάμεσος ισούται με το ημιάθροισμα της 50^{ης} και 51^{ης} παρατηρήσεων, οι οποίες όπως φαίνεται από τις συχνότητες, είναι ίσες με 3 και 4 αντίστοιχα.

$$\text{Άρα } \delta = \frac{3+4}{2} = 3,5$$

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot \alpha + 2 \cdot (30 - \alpha) + 20 \cdot 3 + 4 \cdot 50}{100} = \frac{320 - \alpha}{100} \quad (1)$$

Όμως η μέση τιμή και η διάμεσος διαφέρουν κατά 0,46 άρα

$$\delta - \bar{x} = 0,46 \quad \text{ή} \quad \bar{x} - \delta = 0,46 \Leftrightarrow$$

$$3,5 - \frac{320 - \alpha}{100} = 0,46 \quad \text{ή} \quad \frac{320 - \alpha}{100} - 3,5 = 0,46 \Leftrightarrow$$

$$\alpha = 16 \quad \text{ή} \quad \alpha = -76 \text{ απορρίπτεται αφού } \alpha > 0$$

$$\text{Η (1)} \Rightarrow \bar{x} = \frac{320 - 16}{100} = 3,04$$

24.

Μια μεταβλητή X έχει τιμές : 1, 2, 1, 3, 3, 5, 1, 2, 1, 1 .

i) Να βρείτε την μέση τιμή και την τυπική απόκλιση

ii) Αν οι τιμές της μεταβλητής αυξηθούν κατά 10% ποια θα είναι η νέα μέση τιμή και ποια η τυπική απόκλιση;

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^k v_i x_i = \frac{5 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 5}{10} = \frac{5 + 4 + 6 + 5}{10} = \frac{20}{10} = 2$$

$$S^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k v_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{5(1-2)^2 + 2(2-2)^2 + 2(3-2)^2 + 1(5-2)^2}{10} = 1,6 \quad \text{οπότε } S = \sqrt{1,6} \approx 1,26.$$

ii)

Αν ψ_i είναι οι νέες τιμές τότε $y_i = x_i + \frac{10}{100} x_i \Leftrightarrow$

$$y_i = x_i + 0,1x_i = 1,1x_i$$

Θυμήσου αντίστοιχες εφαρμογές

Άρα $\bar{y} = 1,1 \cdot \bar{x} = 1,1 \cdot 2 = 2,2$

Και $S_y = |1,1| S_x = 1,1 \cdot 1,26 = 1,386$

25.

Αν η τυπική απόκλιση μίας μεταβλητής είναι ίση με το μηδέν δείξτε ότι οι τιμές αυτής είναι ίσες με την μέση τιμή.

Λύση

$$S^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_v - \bar{x})^2}{v}$$

επειδή $S = 0$ θα είναι και $S^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_v - \bar{x})^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_1 - \bar{x} = 0 \text{ και } x_2 - \bar{x} = 0 \text{ και } \dots \text{ και } x_v - \bar{x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_1 = x_2 = \dots = x_v = \bar{x}.$$

26.

Οι τιμές σε €, 10 προϊόντων σ' ένα κατάστημα είναι

2, 1, 3, 4, 3, 3, 4, 1, 5, 4

- i) Να βρείτε: τη διάμεσο, τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση
 ii) Λόγω αύξησης του φόρου, ο καταστηματάρχης κάνει αύξηση σ' όλες τις τιμές 15%. Να βρείτε πως διαμορφώνονται όλα τα μέτρα του (i) ερωτήματος και να εξετάσετε αν μεταβάλλεται ο συντελεστής μεταβολής .

Προτεινόμενη λύση

i)

Τοποθετούμε τις τιμές σε αύξουσα σειρά

1, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5

$$\delta = \frac{5^{\text{η}} \text{παρ} + 6^{\text{η}} \text{παρ}}{2} = \frac{3+3}{2} = 3$$

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot 1 + 2 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 5}{10} = 3$$

$$S^2 = \frac{2(1-3)^2 + (2-3)^2 + 3(3-3)^2 + 3(4-3)^2 + (5-3)^2}{10} = 1,6$$

Συνεπώς $S = \sqrt{1,6} \approx 1,26$ € .

ii)

Αν x_i είναι μια οποιαδήποτε τιμή πριν την αύξηση, μετά την αύξηση κατά 15%, θα γίνει $y_i = x_i + 0,15x_i = 1,15x_i$.

Τότε $\bar{y} = 1,15 \cdot \bar{x} = 1,15 \cdot 3 = 3,45$

$$S_y = | 1,15 | S_x = 1,15 \cdot 1,26 = 1,449$$

Η νέα διάμεσος είναι πάλι το ημίαθροισμα των 5^{ης} και 6^{ης} παρατηρήσεων, κάθε μια των οποίων είναι ίση με $1,15 \cdot 3$ άρα $\delta_y = \frac{1,15 \cdot 3 + 1,15 \cdot 3}{2} = 1,15 \cdot 3 = 3,45$ € .

$$CV_y = \frac{S_y}{\bar{y}} = \frac{1,15 \cdot S_x}{1,15 \cdot \bar{x}} = \frac{S_x}{\bar{x}} = CV_x$$

δηλαδή δε θα μεταβληθεί ο συντελεστής μεταβολής.

27.

Δείξτε ότι, αν από κάθε τιμή μιας μεταβλητής X αφαιρέσουμε την μέση τιμή τους και διαιρέσουμε με την τυπική απόκλιση, τότε οι νέες τιμές θα έχουν μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση 1.

Προτεινόμενη λύση

Έστω x_i οι τιμές της μεταβλητής X .

Μετά τις μεταβολές θα προκύψουν οι τιμές $y_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S_x} = \frac{1}{S_x} x_i - \frac{\bar{x}}{S_x}$ οπότε

$$\bar{y} = \frac{1}{S_x} \bar{x} - \frac{\bar{x}}{S_x} = 0 \quad \text{και} \quad S_y = \left| \frac{1}{S_x} \right| S_x = \frac{1}{S_x} S_x = 1, \quad \text{αφού } S_x > 0.$$

28.

Μία μεταβλητή X με τιμές $x_1, x_2, \dots, x_v$ ακολουθεί την κανονική κατανομή, με εύρος 12. Η μέση τιμή της μεταβλητής είναι 3. Να βρείτε την μέση τιμή των παρατηρήσεων $x_1^2, x_2^2, \dots, x_v^2$.

Προτεινόμενη λύση

Ζητάμε να υπολογίσουμε την ποσότητα

$$\overline{x^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_v^2}{v} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v x_i^2.$$

Αν θυμηθούμε τους τύπους της τυπικής απόκλισης τότε η ζητούμενη ποσότητα διαπιστώνουμε ότι είναι μέσα στον τύπο

$$S^2 = \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^v x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^v x_i \right)^2}{v} \right\} \quad (1).$$

Μέσα στον τύπο όμως αυτό υπάρχουν τα S και $\sum_{i=1}^v x_i$ τα οποία δεν γνωρίζουμε.

Πρέπει λοιπόν να τα υπολογίσουμε.

Επειδή η κατανομή είναι κανονική, θα έχουμε $R \approx 6S$
 $12 = 6S \Leftrightarrow S = 2$

$$\bar{x} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v x_i \Leftrightarrow 3 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v x_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^v x_i = 3v$$

$$\text{Η (1)} \Leftrightarrow 4 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v x_i^2 - \frac{9v^2}{v^2} \Leftrightarrow 4 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v x_i^2 - 9 \Leftrightarrow \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v x_i^2 = 13$$

οπότε η ζητούμενη μέση τιμή είναι 13.

29.

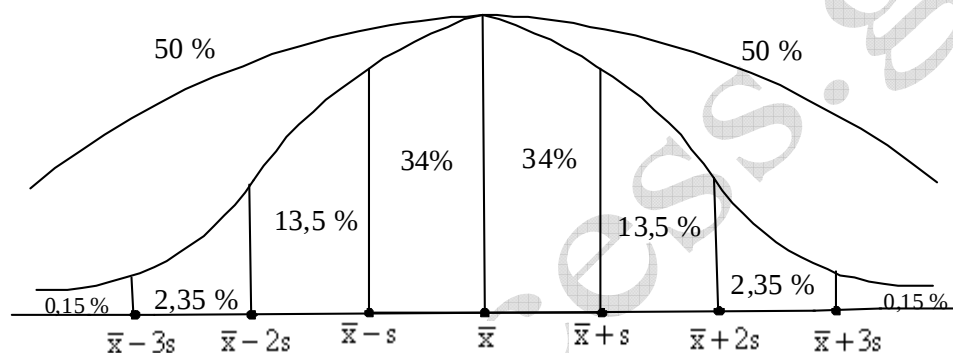
Σε μία κανονική κατανομή η διάμεσος είναι ίση με 8 και το 2,5% των παρατηρήσεων έχουν τιμές μεγαλύτερες από 12.

- Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της κατανομής
- Αν οι παρατηρήσεις αυξηθούν όλες κατά 3 μονάδες, να βρείτε την μεταβολή του CV.
- Κατά πόσο τουλάχιστον θα πρέπει να αυξηθούν οι παρατηρήσεις ώστε το δείγμα να γίνει ομοιογενές;
- Αν το πλήθος των παρατηρήσεων που έχουν τιμή μικρότερη του 6 είναι 1000 να βρείτε το μέγεθος του δείγματος.

Προτεινόμενη λύση

Στο σχήμα παρουσιάζεται η καμπύλη της κανονικής κατανομής

Σχόλιο 7



i)

Είναι $\bar{x} = \delta = 8$

Το 2,5% των παρατηρήσεων έχει τιμές μεγαλύτερες από $\bar{x} + 2S$.

Άρα $\bar{x} + 2S = 12$

$$12 = 2S + 8$$

$$S = 2$$

$$CV = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{2}{8} = 0,25 \text{ δηλαδή } CV = 25\%.$$

ii)

Μετά την αύξηση οι νέες παρατηρήσεις y_i θα δίνονται από την σχέση

$$y_i = x_i + 3 \text{ άρα } \bar{y} = \bar{x} + 3 = 11 \text{ και } S_y = S_x = 2$$

$$\text{οπότε } CV_y = \frac{S_y}{\bar{y}} = \frac{2}{11} = 0,18 \text{ δηλαδή } CV_y = 18\%$$

Επομένως μετά την αύξηση ο συντελεστής μεταβολής ελαττώθηκε κατά 7%.

iii)

$CV_y = 18\% > 10\% \Rightarrow$ το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Για να γίνει ομοιογενές θα πρέπει $CV_y \leq 10\% \Leftrightarrow \frac{S_y}{\bar{y}} \leq 0,1$

Έστω λοιπόν ότι όλες οι παρατηρήσεις πρέπει να αυξηθούν κατά c τότε πρέπει να ισχύει

$$\begin{aligned}\frac{S_y}{y} &\leq 0,1 \Leftrightarrow \frac{2}{8+c} \leq 0,1 \\ 2 &\leq 0,8+0,1c \\ 1,2 &\leq 0,1c \Leftrightarrow c \geq 12\end{aligned}$$

που σημαίνει ότι αν οι παρατηρήσεις αυξηθούν κατά 12 τουλάχιστον μονάδες το δείγμα θα γίνει ομοιογενές .

iv)

Η τιμή 6 είναι ίση με $\bar{x} - S$

Από την καμπύλη της κατανομής τιμή μικρότερη από 6 έχει το 16% των παρατηρήσεων επομένως αν n είναι το μέγεθος του δείγματος τότε

$$\frac{16}{100} \cdot n = 1000 \Leftrightarrow n = 6250$$

30.

Σε μία κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το 50% των παρατηρήσεων έχουν τιμή μεγαλύτερη του 20, το 81,5% των παρατηρήσεων βρίσκονται στο διάστημα (16 , 22) του οποίου τα άκρα είναι κάποιες από τις τιμές $\bar{x} \pm 3S$, $\bar{x} \pm 2S$, $\bar{x} \pm S$.

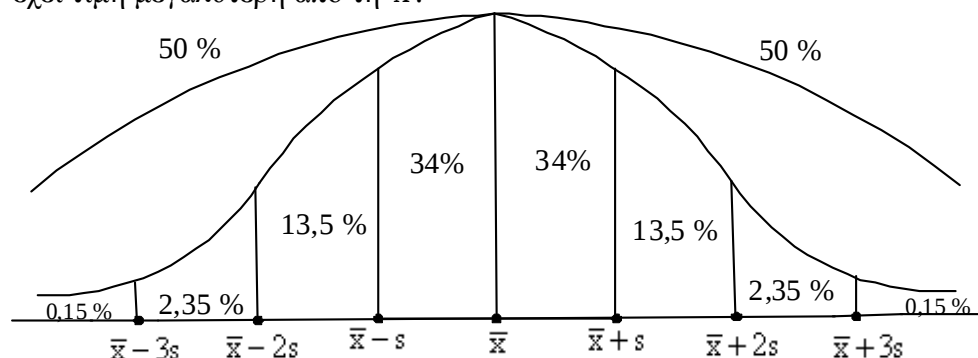
- Δείξτε ότι η μέση τιμή του δείγματος είναι 20 και η τυπική απόκλιση 2
- Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{N}^*$, αν είναι γνωστό ότι στο διάστημα $(\bar{x} - \alpha S, \bar{x} + \alpha S)$ ανήκει το 95% περίπου των παρατηρήσεων.
- Αν R είναι το εύρος της κατανομής, να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{R}{2} x^2 - (\bar{x} + 4)x + 9S.$$

Προτεινόμενη λύση

i)

Από την καμπύλη της κανονικής κατανομής και τα σχετικά ποσοστά, όπως φαίνεται και στο σχήμα, το 50% των παρατηρήσεων έχει τιμή μεγαλύτερη από τη $\bar{x}$.



Επομένως από την υπόθεση θα είναι $\bar{x} = 20$.

Το 81,5% των παρατηρήσεων βρίσκεται στα διαστήματα

$(\bar{x} - S, \bar{x} + 2S)$ ή $(\bar{x} - 2S, \bar{x} + S)$ άρα

$$(\bar{x} - S = 16 \text{ και } \bar{x} + 2S = 22) \text{ ή } (\bar{x} - 2S = 16 \text{ και } \bar{x} + S = 22) \Leftrightarrow$$

$$(20 - S = 16 \text{ και } 20 + 2S = 22) \text{ ή } (20 - 2S = 16 \text{ και } 20 + S = 22) \Leftrightarrow$$

Το πρώτο σύστημα είναι αδύνατο, ενώ το δεύτερο δίνει $S = 2$

ii)

Το 95% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα

$(\bar{x} - 2S, \bar{x} + 2S)$ άρα

$$\bar{x} - 2S = \bar{x} - \alpha S \Leftrightarrow \alpha = 2$$

iii)

Το εύρος $R = 6S \Leftrightarrow R = 12$

Οπότε $f(x) = 6x^2 - 24x + 18$

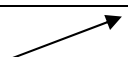
$$f'(x) = 12x - 24$$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f

φαίνονται στον πίνακα

Από τον άξονα βλέπουμε ότι η f παρουσιάζει

ελάχιστο για $x = 2$, το $f(2) = -6$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f'	-	0	+
f			

31.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = -2x^2 + \kappa x + 4\sqrt{x} + 10$, $x \geq 0$.

- α) Αν η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να δείξετε ότι $\kappa = 2$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης
- β) Μία μεταβλητή X ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\bar{x} = f(1)$ και τυπική απόκλιση $S = -\frac{2f'(4)}{13}$. Αν τρεις ακριβώς παρατηρήσεις, αντιπροσωπευτικού δείγματος μεγέθους n , είναι μικρότερες ή ίσες του 8,
- να βρείτε τον αριθμό των παρατηρήσεων που βρίσκονται στο διάστημα $(10, 16)$.
 - να δείξετε ότι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.
 - να βρείτε την μικρότερη τιμή του $\alpha > 0$ που πρέπει να προστεθεί σε κάθε παρατήρηση ώστε το δείγμα να γίνει ομοιογενές.

Προτεινόμενη λύση

α)

Πρέπει $f'(1) = 0$. Όμως $f'(x) = -4x + \kappa + 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow -4 + \kappa + 2 = 0 \Leftrightarrow \kappa = 2$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$

και επειδή $f(1) = -2 \cdot 1^2 + \kappa \cdot 1 + 4\sqrt{1} + 10 = -2 + 2 + 4 + 10 = 14$,

η εξίσωση της εφαπτομένης γίνεται $y - 14 = 0 \Leftrightarrow y = 14$

β)

$\bar{x} = f(1) = 14$

$f'(x) = -4x + \kappa + 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = -4 \cdot 4 + 2 + 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{4}} = -16 + 2 + 1 = -13$

$S = -\frac{2f'(4)}{13} = -\frac{2 \cdot (-13)}{13} = 2$

i) $8 = \bar{x} - 3S$

Από την καμπύλη της κανονικής κατανομής το πολύ $\bar{x} - 3S$ τιμή έχει το 0,15% των παρατηρήσεων

Το πλήθος αυτών των παρατηρήσεων είναι $3 \Rightarrow \frac{0,15}{100} \cdot n = 3 \Rightarrow n = 2000$

Είναι $(10, 16) = (\bar{x} - 2S, \bar{x} + S)$. Στο διάστημα αυτό βρίσκεται το 81,5% των παρατηρήσεων, οπότε το πλήθος τους είναι $\frac{81,5}{100} \cdot 2000 = 1630$

ii) $CV = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{2}{14} \approx 0,14$ δηλαδή $CV = 14\% > 10\%$ το δείγμα δεν είναι ομοιογενές

iii) Αν σε κάθε παρατήρηση προσθέσουμε τη σταθερά $\alpha > 0$, τότε κάθε νέα παρατήρηση θα δίνεται από την σχέση

$$y_i = x_i + \alpha, \text{ οπότε } \bar{y} = \bar{x} + \alpha = 14 + \alpha \text{ και } S_y = S_x = 2.$$

$$\text{Άρα } CV_y = \frac{2}{14 + \alpha}$$

Για να είναι το δείγμα ομοιογενές πρέπει

$$CV_y \leq 0,1 \Leftrightarrow \frac{2}{14 + \alpha} \leq 0,1 \Leftrightarrow 20 \leq 14 + \alpha \Leftrightarrow \alpha \geq 6$$

Η μικρότερη τιμή του α είναι η $\alpha = 6$.

32.

Μία έρευνα έδειξε ότι το 50% περίπου των μαθητών, για να πάνε από το σπίτι στο σχολείο, χρειάζονται περισσότερο από 12 λεπτά, ενώ το 16% περίπου χρειάζεται λιγότερο από 10 λεπτά.

Υποθέτουμε ότι η κατανομή του χρόνου διαδρομής είναι κανονική

- i) Να βρείτε τον μέσο χρόνο διαδρομής των μαθητών και την τυπική απόκλιση του χρόνου διαδρομής
- ii) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές
- iii) Αν οι μαθητές της πόλης είναι 4000 να βρείτε πόσοι μαθητές θα κάνουν χρόνο διαδρομής από 14 έως 16 λεπτά
- iv) Μία ημέρα λόγω έργων κάθε μαθητής καθυστέρησε να πάει στο σχολείο 5 λεπτά. Να βρείτε πόσο μεταβάλλεται ο συντελεστής μεταβολής.

Προτεινόμενη λύση

i)

Είναι $\bar{x} = 12$ λεπτά

Το 16% των παρατηρήσεων έχει τιμές μικρότερες από την $\bar{x} - S$.

$$\text{Άρα } \bar{x} - S = 10 \Leftrightarrow 12 - S = 10 \Leftrightarrow S = 2 \text{ λεπτά}$$

Σχόλιο 7

ii)

$$CV = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{2}{12} \approx 0,166 = 16,6\% > 10\%, \text{ άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές}$$

iii)

$(14, 16) = (\bar{x} + S, \bar{x} + 2S)$ στο διάστημα αυτό βρίσκεται το 13,5% των παρατηρήσεων, άρα $\frac{13,5}{100} \cdot 4000 = 540$ μαθητές

iv)

Αν y_i είναι ο οποιοσδήποτε νέος χρόνος, τότε $y_i = x_i + 5$,

$$\text{Άρα } \bar{y} = \bar{x} + 5 = 12 + 5 = 17 \text{ λεπτά}$$

$$\text{και } S_y = S_x = 2, \text{ οπότε } CV_y = \frac{S_y}{\bar{y}} = \frac{2}{17} \approx 0,117 = 11,7\%$$

Ο συντελεστής μεταβολής ελαττώθηκε κατά $16,6 - 11,7 = 4,9\%$

33.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$

- i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $\Lambda(1, 1)$.
 ii) Από τυχαίο σημείο $M(x, y)$ της γραφικής παράστασης της f φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες $x'x$ και $y'y$, οι οποίες σχηματίζουν με τους ημιάξονες Ox και Oy ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.
 Να βρεθούν οι συντεταγμένες του M ώστε η περίμετρος του ορθογωνίου να είναι ελάχιστη.
 iii) Αν οι τετμημένες πέντε διαφορετικών σημείων της εφαπτομένης του i) ερωτήματος έχουν μέση τιμή 5 και τυπική απόκλιση 2, να βρεθεί η μέση τιμή $\bar{y}$ και η τυπική απόκλιση των τεταγμένων των σημείων αυτών.

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\text{Είναι } f'(x) = -\frac{1}{x^2} \text{ και } f(1) = 1, \quad f'(1) = -1$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $\Lambda(1, 1)$ είναι $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$

$$y - 1 = -1(x - 1)$$

$$y = -x + 2$$

ii)

Η περίμετρος του ορθογωνίου $MAOB$ είναι $\Pi = 2x + 2y$.

Επειδή το M ανήκει στη C_f , θα είναι $y = \frac{1}{x}$

Οπότε η περίμετρος γίνεται

$$\Pi(x) = 2x + \frac{2}{x}, \quad x > 0$$

$$\Pi'(x) = 2 - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^2 - 2}{x^2}$$

$$\Pi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Το πρόσημο της Π' και η μονοτονία της $\Pi(x)$ φαίνονται στο διπλανό πίνακα, από όπου συμπεραίνουμε ότι η $\Pi(x)$ παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 1$

Επομένως το ζητούμενο σημείο είναι το $(1, 1)$,

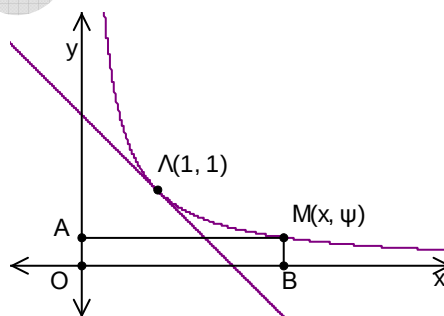
δηλαδή το Λ

iii)

Είναι $\bar{x} = 5$ και $S_x = 2$

Η σχέση που συνδέει την τετμημένη με την τεταγμένη ενός εκάστου των 5 σημείων είναι η $\bar{y} = -x + 2$

Άρα $\bar{y} = -\bar{x} + 2 = -5 + 2 = -3$ και $S_y = |-1|S_x = S_x = 2$



x	0	1	$+\infty$
Π'	-	0	+
Π	↘ ↗		

34.

Έστω $t_1, t_2, \dots, t_n$ οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n , με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση S .

Έστω επίσης η συνάρτηση $f(t) = \frac{1}{300S^2}(t - \bar{x})^3$, $t \in \mathbb{R}$ και $S \neq 0$.

- i) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα
- ii) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής γίνεται ελάχιστος όταν $t = \bar{x}$ και να βρείτε την ελάχιστη τιμή του.
- iii) Αν $f'(0) = 1$, να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής CV των παραπάνω παρατηρήσεων και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.
- iv) Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή των αριθμών $f'(t_1), f'(t_2), \dots, f'(t_n)$ είναι ίση με $\frac{1}{100}$

Προτεινόμενη λύση

$$i) f'(t) = \frac{3}{300S^2}(t - \bar{x})^2(t - \bar{x})' = \frac{1}{100S^2}(t - \bar{x})^2 > 0 \quad \text{για κάθε } t \neq \bar{x}$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

ii)

Η συνάρτηση $f'(t) = \frac{1}{100S^2}(t - \bar{x})^2$ ορίζει τον ρυθμό μεταβολής της f .

$$f''(t) = \frac{2}{100S^2}(t - \bar{x}) = \frac{1}{50S^2}(t - \bar{x})$$

$$f''(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{50S^2}(t - \bar{x}) = 0 \Leftrightarrow t = \bar{x}$$

το πρόσημο της f'' και η μονοτονία της f' φαίνονται στον άξονα

t	$-\infty$	$\bar{x}$	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f'	γν. φθίν.	γν. αύξ.	

Από τον άξονα φαίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής γίνεται ελάχιστος όταν $t = \bar{x}$

$$\text{Η ελάχιστη τιμή του ρυθμού μεταβολής είναι } f'(\bar{x}) = \frac{1}{100S^2}(\bar{x} - \bar{x})^2 = 0$$

$$iii) f'(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{100S^2}(0 - \bar{x})^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{\bar{x}^2}{100S^2} = 1$$

$$\frac{S^2}{\frac{\bar{x}^2}{100}} = \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{S}{\bar{x}} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow CV = \frac{1}{10} \approx 0,1 = 10\%$$

iv)

$$\begin{aligned}
\overline{x_f} &= \frac{f'(t_1) + f'(t_2) + \dots + f'(t_v)}{v} \\
&= \frac{1}{v} \left[\frac{1}{100S^2} (t_1 - \bar{x})^2 + \frac{1}{100S^2} (t_2 - \bar{x})^2 + \dots + \frac{1}{100S^2} (t_v - \bar{x})^2 \right] \\
&= \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{100S^2} \left[(t_1 - \bar{x})^2 + (t_2 - \bar{x})^2 + \dots + (t_v - \bar{x})^2 \right] \\
&= \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{100S^2} \cdot vS^2 = \frac{1}{100}.
\end{aligned}$$

netsuccess.gr

35.

Από δύο τύπους μπαταριών Α και Β επιλέχθηκαν δύο δείγματα μεγέθους 5 το κάθε ένα. Οι χρόνοι ζωής των μπαταριών για το κάθε δείγμα, σε χιλιάδες ώρες δίνονται στον πίνακα.

A	B
20	26
26	32
24	19
22	20
18	23

- Να βρείτε την μέση διάρκεια ζωής μιας μπαταρίας τύπου Α και μιας τύπου Β
- Αν κάθε μπαταρία τύπου Α στοιχίζει 38 ευρώ και κάθε τύπου Β 40 ευρώ, ποιόν τύπο μπαταρίας συμφέρει να αγοράσουμε και γιατί.
- Να βρείτε τις τυπικές αποκλίσεις της διάρκειας ζωής των δύο τύπων μπαταριών.
- Να βρείτε ποιος από τους δύο τύπους παρουσιάζει την μεγαλύτερη ομοιογένεια ως προς την διάρκεια ζωής.

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\bar{x}_A = \frac{20 + 26 + 24 + 22 + 18}{5} = 22 \text{ χιλιάδες ώρες}$$

$$\bar{x}_B = \frac{26 + 32 + 19 + 20 + 23}{5} = 24 \text{ χιλιάδες ώρες}$$

ii)

Το ανά 1 χιλιάδα ώρες κόστος κάθε μπαταρίας τύπου Α είναι $\frac{38}{22} \approx 1,72 \text{ €}$

και του τύπου Β είναι $\frac{40}{24} \approx 1,66 \text{ €}$

Άρα μας συμφέρει να αγοράσουμε μπαταρίες τύπου Β

iii)

$$S_A^2 = \frac{(20 - 22)^2 + (26 - 22)^2 + (24 - 22)^2 + (22 - 22)^2 + (18 - 22)^2}{5} = 8$$

άρα $S_A = \sqrt{8}$ χιλιάδες ώρες

$$S_B^2 = \frac{(26 - 24)^2 + (32 - 24)^2 + (19 - 24)^2 + (20 - 24)^2 + (23 - 24)^2}{5} = 22$$

άρα $S_B = \sqrt{22}$ χιλιάδες ώρες

iv)

$$CV_A = \frac{S_A}{\bar{x}_A} = \frac{\sqrt{8}}{22}, \quad CV_B = \frac{S_B}{\bar{x}_B} = \frac{\sqrt{22}}{24}$$

$$\text{Έστω ότι } CV_A < CV_B \Leftrightarrow \frac{\sqrt{8}}{22} < \frac{\sqrt{22}}{24}$$

$$24\sqrt{8} < 22\sqrt{22}$$

$$576 \cdot 8 < 484 \cdot 22 \text{ πράγμα που ισχύει}$$

Άρα το δείγμα Α παρουσιάζει μεγαλύτερη ομοιογένεια

36.

Έστω x_1, x_2, x_3, x_4 οι τιμές μιας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους 72 .
Δίνεται ότι $v_4 = 3v_3$, και ότι τα τόξα α_i που αντιστοιχούν στις τιμές x_1 και x_2 είναι αντίστοιχα 50° και 30° .

i) Να συμπληρωθεί ο πίνακας

ii) Αν $x_1 < -7$, $x_2 = -7$, $x_3 = 3$ και $x_4 > 3$,

να δείξετε ότι $10R + 72\bar{x} = 52\delta$,

όπου $R = \text{εύρος}$, $\bar{x} = \text{μέση τιμή}$ και

$\delta = \text{διάμεσος}$

x_i	v_i	α_i
x_1		50°
x_2		30°
x_3	v_3	
x_4	$3v_3$	
Σύνολο		

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\alpha_1 = 360^\circ f_1 \Leftrightarrow 50^\circ = 360^\circ \frac{v_1}{72} \Leftrightarrow 50^\circ = 360^\circ \frac{v_1}{72} \Leftrightarrow v_1 = 10$$

$$\alpha_2 = 360^\circ f_2 \Leftrightarrow 30^\circ = 360^\circ \frac{v_2}{72} \Leftrightarrow 30^\circ = 360^\circ \frac{v_2}{72} \Leftrightarrow v_2 = 6$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 72 \Leftrightarrow 10 + 6 + v_3 + 3v_3 = 72 \Leftrightarrow v_3 = 14$$

$$\text{Οπότε } v_4 = 3 \cdot 14 = 42$$

$$\alpha_3 = \frac{v_3}{v} \cdot 360^\circ = \frac{14}{72} \cdot 360^\circ = 70^\circ \text{ και}$$

Ο πίνακας συμπληρωμένος

$$\alpha_4 = 360^\circ - 50^\circ - 30^\circ - 70^\circ = 210^\circ$$

ii)

Μικρότερη τιμή είναι η x_1 και μεγαλύτερη η x_4 , οπότε το εύρος

$$R = x_4 - x_1$$

$$\bar{x} = \frac{10x_1 + 6 \cdot (-7) + 14 \cdot 3 + 42x_4}{72} \Leftrightarrow$$

$$\bar{x} = \frac{5x_1 + 21x_4}{36}$$

$$\delta = \frac{36^\eta \text{ παρ} + 37^\eta \text{ παρ}}{2} = \frac{x_4 + x_4}{2} = x_4$$

$$\text{οπότε } 10R + 72\bar{x} = 10(x_4 - x_1) + 72 \cdot \frac{5x_1 + 21x_4}{36}$$

$$= 10x_4 - 10x_1 + 2(5x_1 + 21x_4)$$

$$= 10x_4 - 10x_1 + 10x_1 + 42x_4 = 52x_4 = 52\delta.$$

x_i	v_i	α_i
x_1	10	50°
x_2	6	30°
x_3	$v_3 = 14$	70°
x_4	$3v_3 = 42$	210°
Σύνολο	72	360°

37.

Έστω $\bar{x} > 20$ και $S_x > 0,20$ παρατηρήσεων $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{20}$. Αν ισχύει

$$\sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 2020 S_x^2 \quad \text{τότε :}$$

- i) Να δείξετε ότι το δείγμα είναι ομοιογενές
 ii) Έστω y_i οι παρατηρήσεις που προκύπτουν από τις x_i με $y_i = x_i - 20$ και $CV_y = 20\%$. Να υπολογίσετε την μέση τιμή $\bar{x}$ και την τυπική απόκλιση S_x των παρατηρήσεων x_i .

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 2020 S_x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 101 S_x^2$$

$$S_x^2 + \bar{x}^2 = 101 S_x^2$$

$$100 S_x^2 = \bar{x}^2$$

$$\frac{S_x^2}{\bar{x}^2} = \frac{1}{100}$$

$$\frac{S_x}{\bar{x}} = \frac{1}{10} \quad (1)$$

$$CV_x = \frac{1}{10} = 0,1 = 10\% \quad \text{άρα δείγμα ομοιογενές}$$

Σχόλιο 6
δεύτερος τύπος

ii)

$$\text{Θα είναι } \bar{y} = \bar{x} - 20 \quad \text{και} \quad S_y = S_x$$

$$CV_y = 20\% \quad \Leftrightarrow \quad \frac{S_y}{\bar{y}} = 0,2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{S_x}{\bar{x} - 20} = 0,2 \quad \Leftrightarrow \quad S_x = 0,2\bar{x} - 4 \quad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των (1), (2) βρίσκουμε $S_x = 4$ και $\bar{x} = 40$

38.

Ένα δείγμα n φίλων εξετάστηκε ως προς την ηλικία του .

Βρέθηκε ότι $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 5n + \sum_{i=1}^n x_i$ και $CV = 25\%$

i) Να βρείτε τα $\bar{x}$ και S

ii) Μετά από πόσα χρόνια το δείγμα θα είναι για πρώτη φορά ομοιογενές;

iii) Να υπολογιστεί η μέση τιμή των παρατηρήσεων: $x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2$

iv) Αν οι φίλοι είναι 4, δείξτε ότι κανενός η ηλικία δεν είναι μεγαλύτερη από 30 χρόνια

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 5n + \sum_{i=1}^n x_i \Leftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 5 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \Leftrightarrow$$

$$S^2 = 5 + \bar{x} \quad (1)$$

$$CV = 25\% \Leftrightarrow \frac{S}{\bar{x}} = 0,25 \Leftrightarrow S = 0,25\bar{x} \quad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των (1), (2) βρίσκουμε $\bar{x} = 20$ και $S = 5$

Άρα $CV = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{5}{20} = 0,25 = 25\%$ δείγμα όχι ομοιογενές

ii)

Έστω ότι μετά από c χρόνια το δείγμα θα γίνει για πρώτη φορά ομοιογενές.

Τότε οι ηλικίες y_i των ατόμων θα δίνονται από την σχέση $y_i = x_i + c$

οπότε $\bar{y} = \bar{x} + c = 20 + c$ και $S_y = S_x = 5$.

$$\text{Τότε } CV_y = \frac{S_y}{\bar{y}} = \frac{5}{20+c} \leq 0,1 \Leftrightarrow 50 \leq 20+c \Leftrightarrow c \geq 30$$

Δηλαδή μετά από τριάντα χρόνια το δείγμα θα γίνει για πρώτη φορά ομοιογενές.

iii)

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2 \Leftrightarrow 25 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - 400 \Leftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = 425$$

Σχόλιο 6,
πρώτος τύπος

Δηλαδή η μέση τιμή των
παρατηρήσεων $x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2$
είναι ίση με 425

iv)

$$\text{Αν οι φίλοι είναι 4 τότε } S^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + (x_4 - \bar{x})^2}{4}$$

$$25 = \frac{(x_1 - 20)^2 + (x_2 - 20)^2 + (x_3 - 20)^2 + (x_4 - 20)^2}{4}$$

$$100 = (x_1 - 20)^2 + (x_2 - 20)^2 + (x_3 - 20)^2 + (x_4 - 20)^2$$

Σχέση η οποία είναι αδύνατη αν κάποιο x_i είναι > 30

39.

Σε ένα τεστ n μαθητές απάντησαν σε χρόνους $t_1, t_2, \dots, t_n$.

Δίνεται ότι η συνάρτηση $f(x) = (t_1 - x)^2 + (t_2 - x)^2 + \dots + (t_n - x)^2$, $x \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει ελάχιστο, το $f(2) = 8$.

i) Να βρείτε την μέση τιμή των $t_1, t_2, \dots, t_n$.

ii) Δείξτε ότι $f'(0) = -4n$

iii) Να βρείτε το μικρότερο πλήθος n ώστε το δείγμα να είναι ομοιογενές.

iv) Αν $\sum_{i=1}^n t_i^2 = 48$, να βρείτε το μέγεθος του δείγματος.

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(t_1 - x)(t_1 - x)' + 2(t_2 - x)(t_2 - x)' + \dots + 2(t_n - x)(t_n - x)' = \\ &= -2(t_1 - x) - 2(t_2 - x) - \dots - 2(t_n - x) = \\ &= -2t_1 + 2x - 2t_2 + 2x - \dots - 2t_n + 2x = \\ &= -2(t_1 + t_2 + \dots + t_n) + n \cdot 2x \end{aligned}$$

Αφού η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 2$ θα είναι $f'(2) = 0$

$$-2(t_1 + t_2 + \dots + t_n) + 4n = 0$$

$$t_1 + t_2 + \dots + t_n = 2n \quad (1)$$

$$\frac{t_1 + t_2 + \dots + t_n}{n} = 2$$

$$\text{Δηλαδή } \bar{x} = 2$$

ii)

$$f'(0) = -2(t_1 + t_2 + \dots + t_n) + n \cdot 2 \cdot 0 = -2(t_1 + t_2 + \dots + t_n) \stackrel{(1)}{=} -2 \cdot 2n = -4n$$

iii)

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{x})^2 = \frac{(t_1 - 2)^2 + (t_2 - 2)^2 + \dots + (t_n - 2)^2}{n} \quad (2)$$

$$\text{Αλλά } f(2) = 8 \Rightarrow (t_1 - 2)^2 + (t_2 - 2)^2 + \dots + (t_n - 2)^2 = 8$$

$$\text{Η (2)} \Rightarrow S^2 = \frac{8}{n} \Rightarrow S = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$$

$$CV = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n}}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$$

Για να είναι το δείγμα ομοιογενές πρέπει

$$CV \leq 0,1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \leq 0,1$$

$$\sqrt{2} \leq 0,1\sqrt{n}$$

$$2 \leq 0,01n$$

$$n \geq 200 \quad \text{δηλαδή το ελάχιστο πλήθος } n \text{ είναι το } 200$$

iv)

Σχόλιο 6, πρώτος τύπος

$$S^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v t_i^2 - \bar{x}^2 \Leftrightarrow \frac{8}{v} = \frac{1}{v} 48 - 4 \Leftrightarrow v = 10$$

40.

Σ' ένα τεστ μαθηματικών, κ μαθητές απάντησαν σε χρόνο $t_1 \in [8, 12)$ και λ μαθητές σε χρόνο $t_2 \in [12, 16)$ λεπτά.

i) Να βρείτε την μέση τιμή του χρόνου απάντησης

ii) Αν S είναι η τυπική απόκλιση δείξτε ότι $S \leq 2$

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\bar{x} = \frac{10\kappa + 14\lambda}{\kappa + \lambda}$$

ii)

$$S \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$S^2 \leq 4$$

$$\frac{\kappa \cdot \left(10 - \frac{10\kappa + 14\lambda}{\kappa + \lambda}\right)^2 + \lambda \cdot \left(14 - \frac{10\kappa + 14\lambda}{\kappa + \lambda}\right)^2}{\kappa + \lambda} \leq 4$$

$$\frac{\kappa \cdot \left(\frac{-4\lambda}{\kappa + \lambda}\right)^2 + \lambda \cdot \left(\frac{4\kappa}{\kappa + \lambda}\right)^2}{\kappa + \lambda} \leq 4$$

$$\frac{16\kappa\lambda^2 + 16\lambda\kappa^2}{(\kappa + \lambda)(\kappa + \lambda)^2} \leq 4$$

$$\frac{4\kappa\lambda}{(\kappa + \lambda)^2} \leq 1 \Leftrightarrow (\kappa - \lambda)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει.}$$